

ПЛАН УРОКА

Предмет	Геометрия
Учитель	Тушалиева А.Л.
Школа, класс	г. Тараз, КГУ «Гимназия №40», 10–11 классы
Тема урока	Тестовые задания по геометрии



www.bilimland.kz

Тест состоит из 30 вопросов.

Первые 20 вопросов – это вопросы с выбором одного правильного ответа из пяти предложенных вариантов.

Вопросы 21-30 – это вопросы с выбором нескольких правильных ответов из восьми предложенных вариантов.

1. Один из катетов прямоугольного равнобедренного треугольника увеличили вдвое, а длину другого – уменьшили на 2 см. При этом площадь треугольника увеличилась на 6 см^2 . Найти первоначальную длину катетов этого треугольника.

А) 6 см; В) 8 см; С) 5 см; D) 2 см; E) 5 см

Решение:

Пусть первоначальная длина катетов треугольника x (см). При этом первоначально площадь составляла $0,5x^2$ (см^2). После изменений катеты стали $2x$ (см) и $(x-2)$ (см), а площадь $0,5 \cdot 2x(x-2) = x^2 - 2x$ (см^2). Известно, что первоначальная площадь на 6 см^2 меньше полученной, значит

$$x^2 - 2x - 0,5x^2 = 6,$$

$$0,5x^2 - 2x - 6 = 0,$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0,$$

$x=6$; $x=-2$ – не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: первоначально длина катетов составляла 6 см.

2. Найти диагональ прямоугольника, периметр которого равен 28 см, площадь равна 48 см².

A) 9 см; B) 10,5 см; C) 12 см; D) 10 см; E) 11 см

Решение:

Пусть стороны прямоугольника x см и y см, используя формулы площади прямоугольника: $S=xy$ и полупериметра: $p=x+y$ и зная, что полупериметр равен 12 см, площадь 24 см², составим систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 48, \\ x + y = 14; \end{cases}$$

Диагональ прямоугольника d можно найти по теореме Пифагора: $d^2=x^2+y^2$.

Возведем в квадрат обе части второго уравнения системы и вычтем из полученного уравнения удвоенное первое уравнение:

$$\begin{cases} 2xy = 96, \\ x^2 + 2xy + y^2 = 196; \end{cases}$$

$x^2+y^2=100$. Квадрат диагонали прямоугольника равен 100, длина диагонали – 10 см.

Ответ: диагональ прямоугольника 10 см.

3. Высота, проведенная из вершины тупого угла равнобедренной трапеции, делит большее основание на части имеющие длины 5 см и 2 см. Вычислите среднюю линию трапеции.

A) 4,5 см; B) 5 см; C) 3,5 см; D) 5,5 см; E) 4 см

Решение:

Высота, проведенная к большему основанию равнобокой трапеции, делит его на части, большая из которых равна средней линии.

Ответ: средняя линия трапеции 5 см.

4. Длины трех измерений в прямоугольном параллелепипеде равны 2 см, 3 см и 6 см. Определите диагональ параллелепипеда.

A) 8 см; B) 5 см; C) 6 см; D) 7 см; E) 9 см

Решение:

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его измерений

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$D^2 = 4 + 9 + 36 = 49, \quad D = 7 \text{ см.}$$

Ответ: диагональ прямоугольного параллелепипеда 7 см.

5. Известны координаты трех вершин параллелограмма ABCD A(2; 3), B(-1; 4), C(1; 1). Найти координаты четвертой вершины.

A) D(4; 1); B) D(0; 4); C) D(2; 1); D) D(5; 1); E) D(4; 0)

Решение:

Пусть $O(x_0; y_0)$ – точка пересечения диагоналей параллелограмма.

Диагонали AC и BD параллелограмма пересекаются в точке O и делятся в этой точке пополам, т.е. O – середина отрезка AC и середина отрезка BD.

Сначала найдем координаты точки O (как координаты середины отрезка AC):

$$x_O = \frac{x_A + x_C}{2},$$

$$x_O = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$y_O = \frac{y_A + y_C}{2},$$

$$y_O = \frac{3 + 1}{2} = 2.$$

Теперь найдем координаты точки D (используя те же формулы, только для отрезка BD):

$$x_O = \frac{x_B + x_D}{2},$$

$$\frac{3}{2} = \frac{-1 + x_D}{2},$$

$$x_D = 4,$$

$$y_O = \frac{y_B + y_D}{2},$$

$$2 = \frac{4 + y_D}{2}$$

$$y_D = 0.$$

Ответ: D(4; 0).

6. Около правильной треугольной пирамиды со стороной основания 9 см и высотой 10 см описан шар. Найти радиус шара.

A) 7,25 см; B) 6 см; C) 6,4 см; D) 6,35 см; E) 5,6 см

Решение:

Радиус шара, описанного около правильной треугольной пирамиды вычисляется по формуле: $R = \frac{l^2}{2H}$, где l боковое ребро пирамиды, H – высота.

Найдем радиус окружности, описанной около правильного треугольника со стороной 9 см: $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $r = 3\sqrt{3}$ см.

Боковое ребро вычислим по теореме Пифагора: $l^2 = 100 + 27$.

Найдем радиус шара, описанного около пирамиды: $R = \frac{127}{20} = 6,35$ см.

Ответ: 6,35 см.

7. При каком значении a векторы $\vec{a}\{-2; 3; a\}$ и $\vec{b}\{6; 0; a\}$ образуют острый угол?

A) $(2\sqrt{3}; +\infty)$; B) $(-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$; C) \mathbb{R} ; D) $(0; +\infty)$; E) $(-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$

Решение:

Угол между векторами острый, если скалярное произведение векторов – положительное число.

Скалярное произведение векторов найдем как сумму произведений соответствующих координат: $-2 \cdot 6 + 0 + a^2 = -12 + a^2$.

Решением неравенство $a^2 - 12 > 0$ является $(-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}; +\infty)$

8. Объем куба равен $16\sqrt{2}$ см³. Найти радиус окружности, описанной около грани куба.

А) 3 см; В) 2 см; С) $2\sqrt{2}$ см; D) $2,5\sqrt{2}$ см; Е) $1,5\sqrt{2}$ см

Решение:

Ребро куба a вычисляется по формуле $a = \sqrt[3]{V}$, значит ребро куба

$$a = \sqrt[3]{16\sqrt{2}} = \sqrt[3]{2^{4+\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{9}{2}}} = 2^{\frac{9 \cdot 1}{2 \cdot 3}} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2} \text{ см.}$$

Радиус окружности, описанной около стороны квадрата равен половине диагонали квадрата, а диагональ d можно вычислить по формуле $d = a\sqrt{2}$,

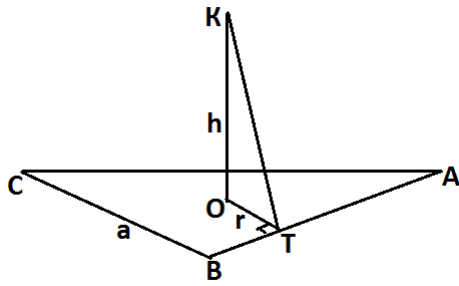
т.е. радиус: $R = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Получим: $R = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$ см.

Ответ: радиус окружности, описанной около грани куба 2 см.

9. Угол между боковой гранью и плоскостью основания правильной треугольной пирамиды равен 45° . Объем пирамиды равен 9 м³. Найти сторону основания пирамиды.

А) 9 см; В) 2 см; С) $2\sqrt{3}$ см; D) 5 см; Е) 6 см

Решение:



В правильной треугольной пирамиде KABC основание высоты – центр треугольника ABC, отрезок OT – радиус окружности, вписанной в треугольник ABC вычисляется по формуле $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Углом между плоскостью основания и плоскостью боковой грани является угол, образованный апофемой KT и радиусом вписанной окружности TO, т.е. угол KTO.

Угол KTO равен 45° , значит треугольник KTO – прямоугольный и равнобедренный, т.е. высота пирамиды равна радиусу вписанной в основание окружности: $h = r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Объем пирамиды можно вычислить по формуле $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h$, а площадь основания (правильного треугольника) по формуле $S_{\text{осн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

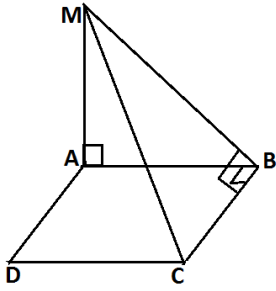
Получим: $9 = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}}, a^3 = 216, a = 6\text{ м.}$

Ответ: $a = 6\text{ м.}$

10. Из вершины A квадрата ABCD со стороной 16 см восстановлен к плоскости квадрата перпендикуляр AM длиной 12 см. Найти площадь треугольника BMC.

A) 120 см^2 ; B) 200 см^2 ; C) 155 см^2 ; D) 320 см^2 ; E) 160 см^2

Решение:



Найдем по теореме Пифагора длину отрезка BM – гипотенузу прямоугольного треугольника AMB с катетами $AM=12$ см, $AB=16$ см:

$$BM = \sqrt{144 + 256} = 20 \text{ см.}$$

По теореме о трех перпендикулярах треугольник BMC – прямоугольный (MA – перпендикуляр, MB – наклонная, AB – проекция наклонной, BC – перпендикулярный AB отрезок, лежащий в плоскости проекции наклонной, т.е. угол MBC – прямой).

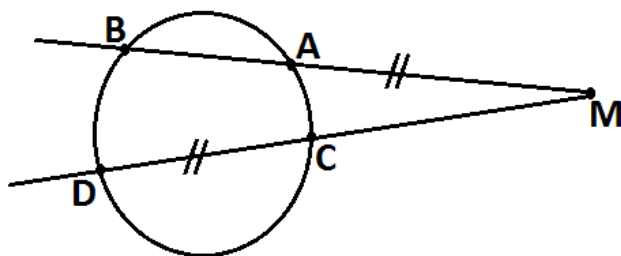
Площадь прямоугольного треугольника BMC равна половине произведения его катетов BC и BM , т.е. искомая площадь равна 160 см^2 .

Ответ: 160 см^2 .

11. Из точки M проведены две секущие к окружности, пересекающие её в точках A, B и C, D соответственно. Найдите CD , если $MB = 10$, $MD = 15$, $CD = MA$.

А) 9 см; В) 6 см; С) $2\sqrt{2}$ см; D) 5 см; E) 4 см

Решение:



Отрезки секущих MA , MB , MC и MD связаны теоремой: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

Зная, что $CD=MA$ и $CM=MD-CD$, получим: $10CD=15(15-CD)$, т.е. $CD=9$ см.

Ответ: $CD=9$ см.

12. Образующая прямого конуса равна 4 см и наклонена к плоскости основания под углом 30° . Найти объем конуса.

А) $8\pi \text{ см}^2$; В) $6\pi \text{ см}^2$; С) $12\pi \text{ см}^2$; D) $10\pi \text{ см}^2$; E) $4\pi \text{ см}^2$

Решение:

Объем конуса вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, где R – радиус основания конуса, H – его высота.

Известно, что угол наклона образующей (длина которой 4 см) к плоскости основания, т.е. угол между образующей и основанием равен 30° . Значит высота конуса, радиус его основания и образующая – стороны прямоугольного треугольника с углом 30° . Длина высоты – 2 см (половина длины гипотенузы), длина радиуса – $2\sqrt{3}$ см (в прямоугольном треугольнике с углом 30° катеты относятся как $\sqrt{3}$).

Найдем объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot 2 = 8\pi \text{ см}^3$.

Ответ: объем конуса $8\pi \text{ см}^3$.

13. Дана точка A(3; 2; 4). Найти сумму расстояний от точки A до оси Oy и от точки A до плоскости xOz.

А) $\sqrt{2} + 3$; В) 9; С) 5; D) 7; E) 12

Решение:

Квадрат расстояния от точки A(3; 2; 4) до оси Oy вычисляется по теореме Пифагора как сумма квадратов координат x и z, т.е. $AA_y = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (ед отр).

Расстояние от точки A до плоскости xOz – равно величине координаты y, т.е. $AA_{xOz} = 2$ (ед отр).

Таким образом $AA_y + AA_{xOz} = 5 + 2 = 7$ (ед отр).

Ответ: $AA_y + AA_{xOz} = 7$ (ед отр).

14. Найти площадь круга, вписанного в прямоугольный треугольник, если проекции катетов на гипотенузу равны 9 м и 16 м.

А) $40\pi \text{ м}^2$; В) $16\pi \text{ м}^2$; С) $36\pi \text{ м}^2$; D) $49\pi \text{ м}^2$; E) $25\pi \text{ м}^2$

Решение:

Если $AK=9 \text{ м}$, $BK=16 \text{ м}$, то $AB=25 \text{ м}$.

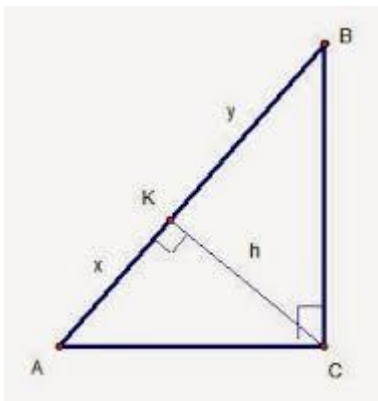
Запишем определение косинуса угла А сначала в прямоугольном треугольнике АКС, затем в прямоугольном треугольнике АСВ:

$$\cos A = \frac{AK}{AC} = \frac{AC}{AB}, \quad AC^2 = 9 \cdot 25, \quad AC = 15 \text{ м}.$$

Аналогично, рассмотрев треугольники ВКС и ВСА, получим $BC=20 \text{ м}$.

Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, вычислим по формуле $r = \frac{AC+BC-AB}{2}$, получим $r = \frac{15+20-25}{2} = 5 \text{ м}$.

Площадь круга $S_{кр} = \pi R^2$, значит $S_{кр} = 25\pi \text{ м}^2$.



Ответ: $25\pi \text{ м}^2$.

15. Сфера задана уравнением $x^2+y^2+z^2-2x+4y=4$. Найти координаты центра сферы и длину ее радиуса.

А) (1; -2; 0), $R=3$; В) (-1; -2; -1), $R=3$; С) (1; 2; 0), $R=9$; D) (1; 2; 1), $R=2$; E) (1; 2; 0), $R=4$

Решение:

Уравнение сферы имеет вид $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, где $O(a; b; c)$ – координаты ее центра, R – радиус сферы, $M(x; y; z)$ – любая точка сферы, значит

$$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)+(z-0)^2=4+1+4,$$

$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$ – уравнение сферы и $O(1; -2; 0)$, $R=3$.

Ответ: $O(1; -2; 0)$, $R=3$.

16. Площадь осевого сечения прямого кругового цилиндра равна 24 м^2 .
Найти площадь его боковой поверхности.

А) $24\pi \text{ м}^2$; В) 72 м^2 ; С) $8\pi \text{ м}^2$; D) 68 м^2 ; E) $36\pi \text{ м}^2$

Решение:

Площадь осевого сечения цилиндра можно вычислить по формуле

$$S_{\text{осев сеч}} = 2RH, \text{ а площадь боковой поверхности - } S_{\text{бок пов}} = 2\pi RH, \text{ значит}$$
$$S_{\text{бок пов}} = 24\pi \text{ м}^2.$$

Ответ: площадь боковой поверхности $24\pi \text{ м}^2$.

17. Отрезок DO – биссектриса треугольника DBC . Найти DC , если $BO=8 \text{ см}$,
 $BC=22 \text{ см}$, $BD=12 \text{ см}$.

А) 10 см ; В) 14 см ; С) 33 см ; D) 21 см ; E) 27 см

Решение:

Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам, т.е.

$$\frac{DB}{BO} = \frac{DC}{OC}, \quad DC = \frac{DB \cdot OC}{BO} = \frac{12 \cdot (22-8)}{8} = 21 \text{ см}.$$

Ответ: $DC=21 \text{ см}$.

18. В треугольнике ABC с вершинами $A(4; -3)$, $B(1; -5)$, $C(-2; 8)$ проведена медиана CK к стороне AB . Найти уравнение медианы.

А) $3x-8y+11=0$; В) $5x+8y-11=0$; С) $8x-3y+2=0$; D) $8y+3x-3=0$; E) $8x+3y-8=0$

Решение:

Найдем координаты точки К – середины отрезка АВ:

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2},$$

$$x_K = \frac{4 + 1}{2} = 2,5$$

$$y_K = \frac{y_A + y_B}{2},$$

$$y_K = \frac{-3 - 5}{2} = -4$$

К(2,5; -4)

Составим уравнение прямой, проходящей через две точки К и С

$$\frac{x - x_K}{x_C - x_K} = \frac{y - y_K}{y_C - y_K},$$

$$\frac{x - 2,5}{-2 - 2,5} = \frac{y + 4}{8 + 4},$$

$$12x - 30 = -4,5y - 18,$$

$$12x + 4,5y - 12 = 0,$$

$$8x + 3y - 8 = 0.$$

Ответ: уравнение медианы $8x + 3y - 8 = 0$.

19. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый его угол равен 150° ?

А) 4; В) 12; С) 10; D) 5; E) 8

Решение:

1 способ.

Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника вычисляется по формуле

$$S_n = 180^\circ(n - 2).$$

Сумма внутренних углов этого правильного многоугольника составляет $150^\circ n$.

Составим уравнение $150^\circ n = 180^\circ(n - 2)$, получим $n=12$.

2 способ.

Сумма внешних углов многоугольника, взятых по одному при каждой вершине равна 360° , каждый внешний угол этого многоугольника $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

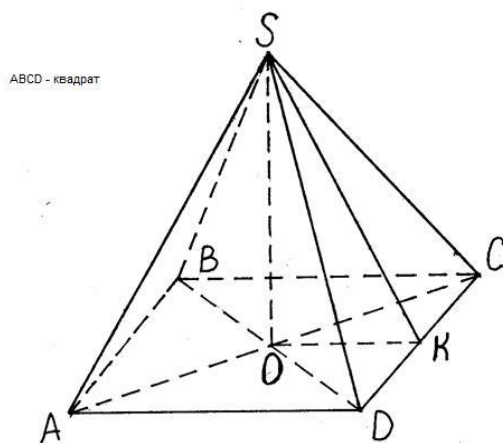
Количество углов (а значит, и количество сторон) $360^\circ : 30^\circ = 12$.

Ответ: 12 сторон.

20. Найти боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды, если площадь полной поверхности 16 см^2 , а сторона основания равна 2 см .

А) $2\sqrt{2} \text{ см}$; В) $\sqrt{5} \text{ см}$; С) 2 см ; D) 4 см ; Е) $\sqrt{10} \text{ см}$

Решение:



Площадь полной поверхности пирамиды

$$S_{\text{пп}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бп}} = a^2 + \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot SK = a^2 + 2a \cdot SK$$

$$a^2 + 2a \cdot SK = 16,$$

$$SK = 3 \text{ см.}$$

Высоту SO найдем по теореме Пифагора из треугольника $SOК$, в котором $OK = \frac{1}{2}BC = 1 \text{ см}$,

$$SO^2 = SK^2 - OK^2, \quad SO = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2} \text{ см.}$$

Ответ: $2\sqrt{2} \text{ см}$.

21. В прямоугольном треугольнике ABC катет AB=12 см, катет BC=5 см. Значит в треугольнике ABC:

- A) один из катетов вдвое меньше гипотенузы
- B) площадь треугольника ABC равна 30 см^2
- C) радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен 6,5 см
- D) $\text{ctg}C = 2,4$
- E) радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 1 см
- F) полупериметр треугольника ABC равен 30 см
- G) высота треугольника ABC, проведенная к гипотенузе равна $2\frac{4}{13}$ см
- H) биссектриса прямого угла треугольника совпадает с высотой, проведенной к гипотенузе

Решение:

- A) один из катетов вдвое меньше гипотенузы (не верно)
- B) площадь треугольника ABC равна 30 см^2
(верно, площадь равна половине произведения катетов)
- C) радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен 6,5 см
(верно, радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника равен длине медианы, проведенной к гипотенузе и равен половине длины гипотенузы и равен $\frac{13}{2} = 6,5$)
- D) $\text{ctg}C = 2,4$ (не верно, $\text{ctg}C = \frac{CB}{AB} = \frac{5}{12}$)
- E) радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 1 см (не верно, радиус окружности равен $r = \frac{5+12-13}{2} = 2$ см)
- F) полупериметр треугольника ABC равен 30 см (не верно, периметр треугольника равен $5+12+13=30$ см)

Г) высота треугольника ABC, проведенная к гипотенузе равна $2\frac{4}{13}$ см (не верно, высота, проведенная к гипотенузе $h_c = \frac{ab}{c} = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13} = 4\frac{8}{13}$ см)

Н) биссектриса прямого угла треугольника совпадает с высотой, проведенной к гипотенузе (не верно, биссектриса и высота, проведенные из вершины прямого угла не совпадают)

Ответ: В, С.

22. В окружности радиусом 25 см проведены две параллельные хорды длиной 14 см и 40 см. Найти расстояние между хордами.

А) 31 см

В) 14 см

С) 26 см

Д) 11 см

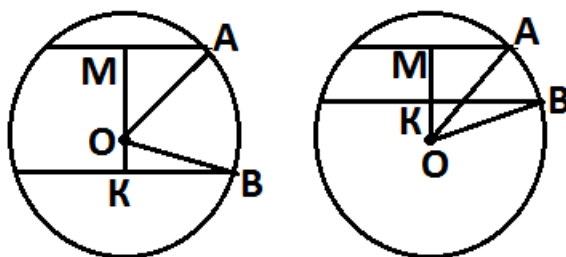
Е) 33 см

Ф) 39 см

Г) 14 см

Н) 41 см

Решение:



Расстояние между хордами МК можно найти как сумму (в случае, если хорды лежат по разные стороны от центра окружности О) или как разность (в случае, если хорды лежат по одну сторону от центра окружности О) расстояний от центра окружности до каждой из хорд.

Длину отрезка ОК найдем по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ОКВ, в котором ОК=25 см, КВ=0,5·40=20 см:

$$OK = \sqrt{625 - 400} = 15 \text{ см.}$$

Длину отрезка ОМ найдем по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ОАМ, в котором ОА=25 см, МА=0,5·14=7 см:

$$OM = \sqrt{625 - 49} = 24 \text{ см.}$$

$$MK=24+15=39 \text{ см или } MK=24-15=11 \text{ см}$$

Ответ: МК=11 см или МК=39 см.

23. Найти значения m , при котором векторы $\vec{x}\{1; m\}$ и $\vec{y}\{m; 9\}$ коллинеарны.

А) 3

В) 9

С) 1

Д) 11

Е) -1

Ф) -3

Г) -9

Н) 0

Решение:

Векторы, координаты которых пропорциональны, коллинеарны.

$$\frac{1}{m} = \frac{m}{9}, m = \pm 3.$$

При $m=3$ векторы коллинеарны и сонаправлены, а при $m=-3$ они коллинеарны и противоположно направлены.

Ответ: $m=3$ и $m=-3$.

24. Через диагональ грани куба с ребром 2 см и вершину противоположной грани проведено сечение. Найти площадь сечения.

A) $2\sqrt{3}$ см²

B) 4 см²

C) 16 см²

D) $3\sqrt{2}$ см²

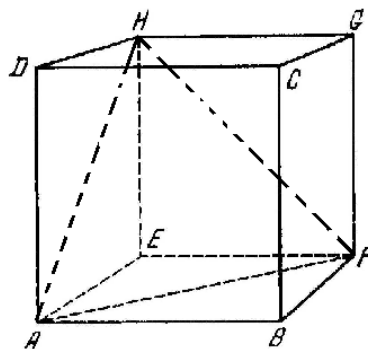
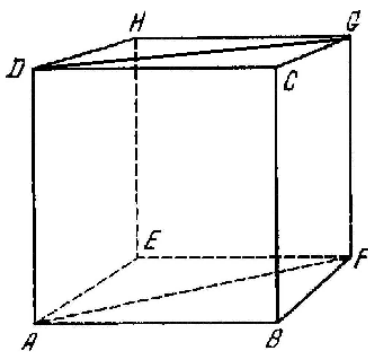
E) $\sqrt{6}$ см²

F) 2 см²

G) $4\sqrt{2}$ см²

H) $4\sqrt{3}$ см²

Решение:



Если сечение проведено через соответствующую диагональ противоположной грани, то его площадь равна произведению ребра куба на диагональ грани, т.е. $S = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ см².

Если сечение проведено через диагональ и противоположную вершину, то сечение – равносторонний треугольник со стороной, равной диагонали куба, т.е. со стороной, равной $2\sqrt{2}$ см: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{8\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$ см².

Ответ: $S = 4\sqrt{2}$ см² или $S = 2\sqrt{3}$ см².

25. Один из углов равнобедренного треугольника равен 40° . Найти остальные углы этого треугольника.

- A) 40° и 110°
- B) 40° и 100°
- C) 100° и 100°
- D) 60° и 80°
- E) 40° и 70°
- F) 100° и 70°
- G) 70° и 70°
- H) 80° и 40°

Решение:

Если задан угол при основании равнобедренного треугольника, то два других угла равны 40° и $180^\circ - 2 \cdot 40^\circ = 100^\circ$.

Если задан угол при вершине равнобедренного треугольника, то два других угла равны по $(180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$.

Ответ: углы 40° и 100° или два угла по 70° .

26. Площадь треугольника 75 см^2 . Две его стороны равны 15 см и 20 см. Найти угол треугольника, образованный этими сторонами.

- A) 30°
- B) 45°
- C) 60°
- D) 75°
- E) 150°
- F) 135°
- G) 120°

Н) 90°

Решение:

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними, значит

$$75 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 20 \cdot \sin \alpha, \sin \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\alpha = 30^\circ \text{ или } \alpha = 150^\circ$$

Ответ: $\alpha = 30^\circ$ или $\alpha = 150^\circ$

27. Две окружности, радиусами 14 см и 6 см касаются. Найти расстояние между их центрами.

A) 32 см

B) 18 см

C) 12 см

D) 10 см

E) 16 см

F) 14 см

G) 8 см

H) 20 см

Решение:

Если окружности касаются внешним образом, то расстояние между центрами равно сумме длин радиусов и равно $14+6=20$ см.

Если окружности касаются внутренним образом, то расстояние между центрами равно разности длин радиусов и равно $14-6=8$ см.

Ответ: 20 см или 8 см.

28. Прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см вращается вокруг своего катета. Найти полную поверхность полученного тела вращения.

A) $100\pi \text{ см}^2$

B) $180\pi \text{ см}^2$

C) $92\pi \text{ см}^2$

D) $112\pi \text{ см}^2$

E) $144\pi \text{ см}^2$

F) $120\pi \text{ см}^2$

G) $98\pi \text{ см}^2$

H) $96\pi \text{ см}^2$

Решение:

При вращении прямоугольного треугольника вокруг катета получится конус, полная поверхность которого вычисляется по формуле

$$S_{\text{полн пов}} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R).$$

Образующая конуса – гипотенуза треугольника.

Найдем гипотенузу по теореме Пифагора: $l = \sqrt{36 + 64} = 10 \text{ см}$.

Если конус получен вращением вокруг катета 6 см, то радиус конуса равен 8 см и $S_{\text{полн пов}} = \pi R(l + R) = 8\pi(10 + 8) = 144\pi \text{ см}^2$.

Если конус получен вращением вокруг катета 8 см, то радиус конуса равен 6 см и $S_{\text{полн пов}} = \pi R(l + R) = 6\pi(10 + 6) = 96\pi \text{ см}^2$.

Ответ: $S_{\text{полн пов}} = 144\pi \text{ см}^2$ или $S_{\text{полн пов}} = 96\pi \text{ см}^2$.

29. Даны точки A(-3; 2; 5), B(0; -6; -3) и точка M, которая делит отрезок AB в отношении 2:3. Найти координаты точки M.

A) M(-1,8; -1,2; 1,8)

B) M(-1,8; 1,2; 1,8)

C) $M(1,8; -1,2; 0,8)$

D) $M(-2,8; 0; 1,4)$

E) $M(-1,6; -1,2; 1,4)$

F) $M(-1,2; -2,8; 0,2)$

G) $M(1,2; -2,6; 0,4)$

H) $M(1,2; -2,2; 0)$

Решение:

Если точка М делит отрезок АВ в отношении 2:3, считая от точки А, то ее координаты можно найти по формулам:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}; \quad y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}; \quad z_M = \frac{z_A + \lambda z_B}{1 + \lambda}, \text{ в которых } \lambda = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Получим: } x_M = \frac{-3 + \lambda \cdot 0}{1 + \frac{2}{3}} = -\frac{9}{5} = -1\frac{4}{5};$$

$$y_M = \frac{2 - 6 \cdot \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = -\frac{6}{5} = -1\frac{1}{5}; \quad z_M = \frac{5 - 3 \cdot \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}. \quad M(-1,8; -1,2; 1,8)$$

Если точка М делит отрезок АВ в отношении 2:3, считая от точки В, то ее координаты можно найти по тем же формулам, но $\lambda = \frac{3}{2}$

$$\text{Получим: } x_M = \frac{-3 + \lambda \cdot 0}{1 + \frac{3}{2}} = -\frac{6}{5} = -1\frac{1}{5};$$

$$y_M = \frac{2 - 6 \cdot \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = -\frac{14}{5} = -2\frac{8}{5}; \quad z_M = \frac{5 - 3 \cdot \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{1}{5}. \quad M(-1,2; -2,8; 0,2)$$

Ответ: $M(-1,8; -1,2; 1,8)$ или $M(-1,2; -2,8; 0,2)$

30. Уравнение $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$ задает:

A) прямую, пересекающую оси координат в точках $(0; 2)$ и $(-1; 0)$

B) окружность с центром $(2; -1)$ и радиусом 4

C) окружность с центром $(-2; 1)$, не пересекающую координатные оси

D) окружность, расположенную в первой и второй координатных четвертях

E) окружность, пересекающую каждую из координатных осей в двух точках

F) окружность, длина которой 16π единиц, площадь круга, ограниченного этой окружностью 16π кв единиц

G) окружность, касающаяся координатных осей

H) окружность, которой принадлежит точка $M(-1; 6)$

Решение:

Уравнение $(x-2)^2+(y+1)^2=16$ задает окружность с центром $(2; -1)$, радиусов 4 ед отрезка, пересекающую каждую из координатных осей в двух точках, расположенную во всех координатных четвертях, длина окружности $2 \cdot 4\pi=8\pi$ единиц, площадь круга, ограничивающего окружность 16π кв единиц, точка $M(-1; 6)$ не принадлежит этой окружности, так как ее координаты не удовлетворяют ее уравнению.

Ответ: B, E.