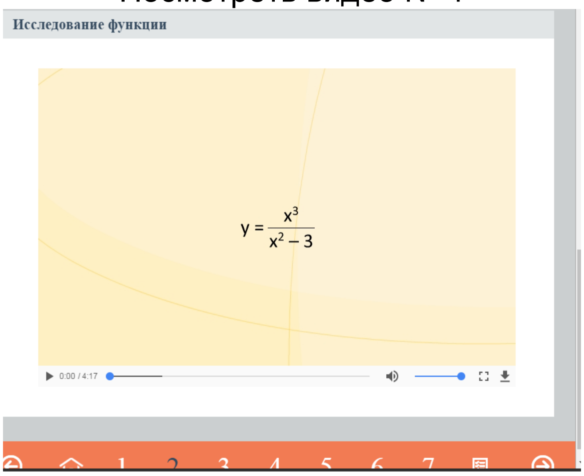
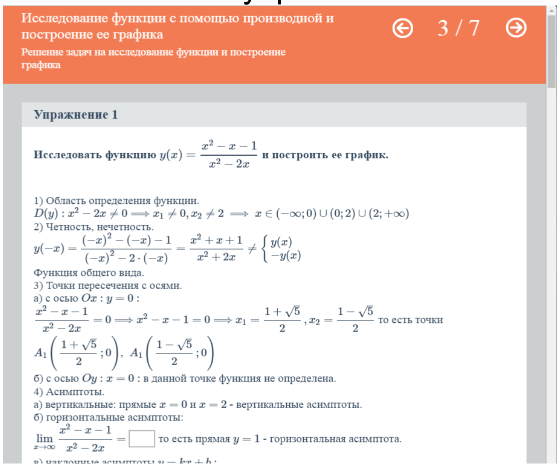
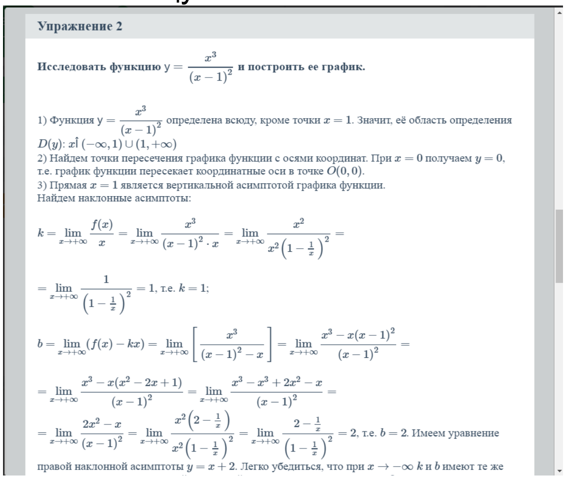
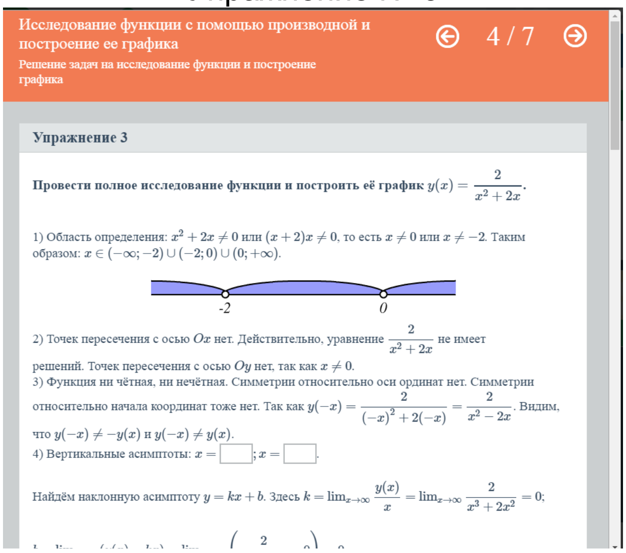
| | |
|---|---|
| **Предмет** | Алгебра |
| **Учитель** | Бухтоярова Светлана Николаевна |
| **Школа, класс** | г. Талдыкорган, КГУ «СШГ №12», 10 класс |
| **Тема урока** | Исследование функции с помощью производной |

www.bilimland.kz

| | |
|---|---|
| **Цели обучения, которые будут достигнуты с помощью данного урока:** | 1.Уметь находить нули функции по графику на заданном интервале.<br>2. Уметь находить промежутки возрастания и убывания функции, экстремумы функции, точки максимумы и минимума |
| **Цели урока:** | 1. Познакомить учащихся с понятием исследования функции с помощью производной;<br>2. Ввести алгоритм решения исследования функции с помощью производной;<br>3. Познакомить с применением исследования на любой функции (линейной, квадратичной, тригонометрической). |
| **Критерии успеха:** | Знают понятие четности и нечетности функции.<br>Знают область определения любой функции.<br>Знают область значения любой функции.<br>Знают, как находить нули функции.<br>Умеют находить промежутки возрастания и убывания функции.<br>Умеют по алгоритму находить экстремумы функции.<br>Умеют находить наибольшее и наименьшее значение функции<br>Знают метод интервалов.<br>Развивают умение обобщать и правильно построить график по исследованию функции. |
| **Языковые цели:** | Используют и понимают математические термины для исследования функции с помощью производной |
| **Привитие ценностей:** | Сотрудничество, уважение, умение работать в коллективе, открытость, творчество и обучение на всем этапе жизненного пути |
| **Межпредметные связи:** | Информатика |
| **Навыки использования ИКТ:** | Интерактивная доска, Bilimland.kz, Itest.kz |
| **Предварительные знания:** | Знание понятие функции и ее области определения и значения из курса 8 класса, Знание нахождения производной, промежутков возрастания и убывания функции, наибольшего и наименьшего значения |

## Ход урока

| Этапы урока | Содержание | Ресурсы |
|---|---|---|
| **Начало урока**<br>2 минуты | Организационный момент.<br>Вспомнить определения и понятия из предыдущих уроков. Проверить домашнее задание.<br><br>Провести устный опрос:<br>- что мы изучали на прошлом уроке, какова была цель нашего урока?<br>- что мы знаем о функции?<br>- что вы знаете о промежутках возрастания и убывания функции?<br>- как можно найти наибольшее и наименьшее значение функции?<br><br>Сообщить учащимся тему и цель сегодняшнего урока. (Слайд 1 и слайд 2) | Флипчарт<br>Слайд 1 – 2 |
| **Середина урока**<br>5 минут | Алгоритм исследования функции<br><br>1. Найти область определения.<br>2. Область значений(если возможно найти)<br>3. Исследовать на четность и нечетность, периодичность (для тригонометрических) функцию.<br>4. Найти точки пересечения графика с осями координат(осью Ох  (х;0) и осью Оу  (0;у) )<br>5. Найти критические точки.<br>6. Найти промежутки монотонности(возрастания и убывания)<br>7. Найти точки экстремума и экстремум функции(xmax, xmin, ymax, ymin)<br>8. Построить график.<br>9. Если необходимо вычислить дополнительные точки<br><br>Посмотреть видео № 1<br><br>Рис1. | http://bilimland.kz/ru/content/structure/876-math#lesson=11812 |

| | | |
|---|---|---|
| **Работа в парах**<br>5 минут | Выполним упражнение №1<br><br>Исследование функции с помощью производной и построение ее графика<br>Решение задач на исследование функции и построение графика<br>3 / 7<br>**Упражнение 1**<br>**Исследовать функцию** $y(x)=\frac{x^2-x-1}{x^2-2x}$ **и построить ее график.**<br>1) Область определения функции.<br>$D(y): x^2-2x\neq 0 \Longrightarrow x_1\neq 0, x_2\neq 2 \Longrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(2;+\infty)$<br>2) Четность, нечетность.<br>$y(-x)=\frac{(-x)^2-(-x)-1}{(-x)^2-2\cdot(-x)}=\frac{x^2+x+1}{x^2+2x}\neq\begin{cases}y(x)\\-y(x)\end{cases}$<br>Функция общего вида.<br>3) Точки пересечения с осями.<br>а) с осью $Ox: y=0$ :<br>$\frac{x^2-x-1}{x^2-2x}=0\Longrightarrow x^2-x-1=0\Longrightarrow x_1=\frac{1+\sqrt5}{2}, x_2=\frac{1-\sqrt5}{2}$ то есть точки<br>$A_1\left(\frac{1+\sqrt5}{2};0\right)$, $A_1\left(\frac{1-\sqrt5}{2};0\right)$<br>б) с осью $Oy: x=0$ : в данной точке функция не определена.<br>4) Асимптоты.<br>а) вертикальные: прямые $x=0$ и $x=2$ - вертикальные асимптоты.<br>б) горизонтальные асимптоты:<br>$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x-1}{x^2-2x}=\boxed{\phantom{0}}$ то есть прямая $y=1$ - горизонтальная асимптота.<br>Рис.2<br>Выполним упражнение №2 и объединим результаты в таблицу<br><br>**Упражнение 2**<br>**Исследовать функцию** у $=\frac{x^3}{(x-1)^2}$ **и построить ее график.**<br>1) Функция у $=\frac{x^3}{(x-1)^2}$ определена всюду, кроме точки $x=1$. Значит, её область определения<br>$D(y)$: $x\hat{I}\,(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$<br>2) Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. При $x=0$ получаем $y=0$, т.е. график функции пересекает координатные оси в точке $O(0,0)$.<br>3) Прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой графика функции.<br>Найдем наклонные асимптоты:<br>$k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{(x-1)^2\cdot x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2\left(1-\frac1x\right)^2}=$<br>$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1-\frac1x\right)^2}=1$, т.е. $k=1$;<br>$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{(x-1)^2-x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-x(x-1)^2}{(x-1)^2}=$<br>$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-x(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3+2x^2-x}{(x-1)^2}=$<br>$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2-\frac1x\right)}{x^2\left(1-\frac1x\right)^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-\frac1x}{\left(1-\frac1x\right)^2}=2$, т.е. $b=2$. Имеем уравнение<br>правой наклонной асимптоты $y=x+2$. Легко убедиться, что при $x\to-\infty$ $k$ и $b$ имеют те же<br>Рис 3 | <br><br>http://bilimland.kz/ru/content/structure/876-math#lesson=11812 |
| **Работа с классом**<br>5 минут | Упражнение № 3<br><br>Исследование функции с помощью производной и построение ее графика<br>Решение задач на исследование функции и построение графика<br>4 / 7<br>**Упражнение 3**<br>**Провести полное исследование функции и построить её график** $y(x)=\frac{2}{x^2+2x}$.<br>1) Область определения: $x^2+2x\neq0$ или $(x+2)x\neq0$, то есть $x\neq0$ или $x\neq-2$. Таким образом: $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;0)\cup(0;+\infty)$.<br>-2 0<br>2) Точек пересечения с осью $Ox$ нет. Действительно, уравнение $\frac{2}{x^2+2x}$ не имеет решений. Точек пересечения с осью $Oy$ нет, так как $x\neq0$.<br>3) Функция ни чётная, ни нечётная. Симметрии относительно оси ординат нет. Симметрии относительно начала координат тоже нет. Так как $y(-x)=\frac{2}{(-x)^2+2(-x)}=\frac{2}{x^2-2x}$. Видим, что $y(-x)\neq-y(x)$ и $y(-x)\neq y(x)$.<br>4) Вертикальные асимптоты: $x=\boxed{\phantom{0}}$; $x=\boxed{\phantom{0}}$.<br>Найдём наклонную асимптоту $y=kx+b$. Здесь $k=\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^3+2x^2}=0$;<br>Рис.4 | <br><br>http://bilimland.kz/ru/content/structure/876-math#lesson=11812 |
| **Работа в группах**<br>15 минут | 1 группа: Рассмотрим функцию $y(x)=\frac{1}{x-2}$ и построим ее график. | Постеры с исследование м и графиками |

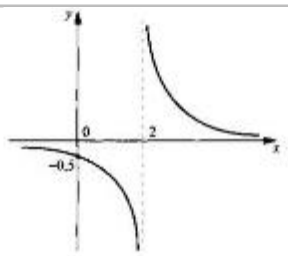
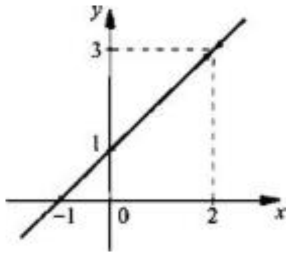
<table>
<tr>
<td></td>
<td>


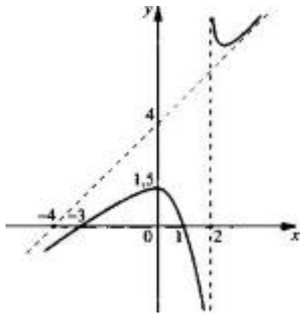

График данной функции получается из графика функции y = 1/x его смещением на 2 единицы вправо. Видно, что при x → 2 (при этом x < 2) знаменатель x - 2 отрицательный и x - 2 → 0. Поэтому значения функции $y = \frac{1}{x-2}$ неограниченно убывают, т. е. y → -∞. При x → 2 (при этом x > 2) знаменатель x - 2 положительный и x - 2 → 0. Поэтому значения функции $y = \frac{1}{x-2}$ неограниченно возрастают, т. е. y → ∞. Следовательно, вертикальная прямая x = 2 является вертикальной асимптотой данной функции $y = \frac{1}{x-2}$.<br>
2 группа: Построим график функции $y = \frac{x^2 - x - 2}{x-2}.$




Разложим числитель данной дроби на множители и сократим ее.
Получаем: $y = \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = x + 1$ (при этом x ≠ 2). Видно, что при x → 2 значения функции y → 3. Поэтому данная функция вертикальной асимптоты не имеет. Существует только значение x = 2, при котором функция не определена.<br>
Обратимся теперь к понятию наклонной асимптоты. Прямая y = kx + b называется наклонной асимптотой функции f(x), если при неограниченном возрастании или убывании x значения функции f(x) стремятся к значениям
</td>
<td>функции</td>
</tr>
</table>

линейной функции y(x), т. е. при $x \to \pm\infty f(x) \to y(x)$.

3 группа: Построим график функции $y = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$.

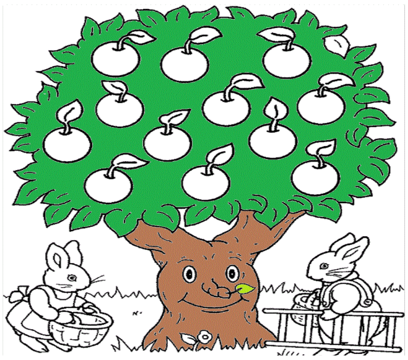



Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. При x = 0 находим: $y = \dfrac{-3}{-2} = 1{,}5$ - точка пересечения с осью ординат. При y = 0 получаем уравнение $0 = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$ или 0 = x2 + 2x - 3, корни которого x1 = -3 и x2 = 1 - точки пересечения с осью абсцисс.

Очевидно, что прямая x = 2 - вертикальная асимптота. При x → 2 числитель дроби x + 2x – 3 → 22 + 2 · 2 - 3 = 5. При x < 2 знаменатель дроби x - 2 отрицательный и x - 2 → 0. Поэтому значения функции y → -∞. При x > 2 знаменатель дроби x - 2 положительный и x - 2 → 0. Поэтому значения функции y → ∞.

Разделим числитель дроби x2 + 2x - 3 на ее знаменатель x - 2 столбиком и выделим целую часть. Тогда функция y(x) имеет вид $y = x + 4 + \dfrac{5}{x - 2}$. Очевидно, при x → ∞ дробь $\dfrac{5}{x - 2} \to 0$ и значения функции y(x) стремятся к значениям линейной функции y = x + 4. Поэтому линейная функция y = x + 4 является наклонной асимптотой для данной функцииy(x).

Учитывая точки пересечения графика функции с осями координат, наличие вертикальной и наклонной асимптот, строим график данной функции. Очевидно, что график функции не пересекает асимптоты. На графике видно, что функция имеет максимум и минимум (найти их координаты можно только с помощью производной).

| | | |
|---|---|---|
| | Частным случаем наклонной асимптоты является горизонтальная асимптота (при k = 0). Горизонтальная прямая y = b называется горизонтальной асимптотой функции f(x), если при неограниченном возрастании или убывании x значения функции f(x) стремятся к величине b, т. е. при $x \to \pm\infty$ $f(x) \to b$. | |
| **Индивидуальная работа**<br>5 минут | Тестовые задания<br>Пять заданий на проверку | http://itest.kz/exam_test?test_id=244860297 |
| **Конец урока**<br>3 минуты | Организует индивидуальную работу над текстом.<br>Проводит рефлексию. Стратегия «Телеграмма»<br><br>Проводит рефлексию.<br>-Какую цель мы поставили сегодня на уроке?<br>-Достигли мы целей, которые ставили в начале урока<br><br><br><br>«Красное яблоко» - урок прошел полезно, плодотворно (все понятно)<br>«Желтое яблоко» - не все получилось, но я старался (хорошо)<br>«Зеленое яблоко» - не смог справиться со всеми заданиями, еще нужно поработать<br><br>Домашнее задание.<br>1. Упражнение № 4,5 с сайта bilimland.kz | Флипчарт слайд 3<br><br>Стикеры |
| | Используемые ресурсы:<br>1. Флипчарты<br><br>2. bilimland.kz<br>3. itest.kz | Флипчарт для интерактивной доски<br>Веб-сайт<br>Веб-сайт |

<table>
<tr><td>Дифференциация – каким образом Вы планируете оказать больше поддержки? Какие задачи Вы планируете поставить перед более способными учащимися?</td><td>Оценивание – как Вы планируете проверить уровень усвоения материала учащимися?</td><td>Здоровье и соблюдение техники безопасности</td></tr>
<tr><td>Работа в паре, разделить на более сильного и медлительного учащегося</td><td>После каждого этапа задавать вопросы, минитесты</td><td>Здоровье сберегающие технологии.<br>Используемые физминутки и активные виды деятельности.</td></tr>
<tr><td>Рефлексия по уроку<br>Были ли цели урока/цели обучения реалистичными?<br>Все ли учащиеся достигли ЦО?<br>Если нет, то почему?<br>Правильно ли проведена дифференциация на уроке?<br>Выдержаны ли были временные этапы урока?<br>Какие отступления были от плана урока и почему?</td><td colspan="2">Используйте данный раздел для размышлений об уроке. Ответьте на самые важные вопросы о Вашем уроке из левой колонки.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Общая оценка<br>Какие два аспекта урока прошли хорошо (подумайте как о преподавании, так и об обучении)?<br>1:<br><br>2:<br><br>Что могло бы способствовать улучшению урока (подумайте как о преподавании, так и об обучении)?<br><br>1:<br><br>2:<br><br>Что я выявил(а) за время урока о классе или достижениях/трудностях отдельных учеников, на что необходимо обратить внимание на последующих уроках?</td></tr>
</table>